Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ y sea

$$[T]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matriz de T con respecto a las bases
$B = \{x + x^2, 1 + x^2, 1 + x\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y
$C = \left\{ [1 \;\; 1 \;\; 0]^T, [1 \;\; 0 \;\; 1]^T, [0 \;\; 1 \;\; 1]^T \right\}$ de $\mathbb{R}^3$,
entonces todas la soluciones de la ecuación
$T(p) = [1 \;\; 0 \;\; 1]^T$ son de la forma:

Seleccione una:

- a. $p(x) = 1 + x + a$ con $a \in \mathbb{R}$.
- b. Ninguna de las otras es correcta.
- c. $p(x) = x + x^2 + ax$ con $a \in \mathbb{R}$. ✖
- d. $p(x) = 1 + x^2 + ax^2$ con $a \in \mathbb{R}$. ✔
- e. $p(x) = 1 - x + a(1 - x - x^2)$ con $a \in \mathbb{R}$.

$$B = \{\underbrace{x + x^2}_{v_1}, \underbrace{1 + x^2}_{v_2}, \underbrace{1 + x}_{v_3}\}$$

$$C = \left\{ \underbrace{[1 \;\; 1 \;\; 0]^T}_{w_1}, \underbrace{[1 \;\; 0 \;\; 1]^T}_{w_2}, \underbrace{[0 \;\; 1 \;\; 1]^T}_{w_3} \right\}$$

$T(v_1) = w_1 + w_3$

$T(v_2) = w_2$

$T(v_3) = T(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 + w_3$

$\Rightarrow \quad Nu(T) = \text{gen}\{v_1 + v_2 - v_3\}$

$T(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene que estar en la $Im(T)$

$Im(T) = \text{gen}\{w_1 + w_3, w_3\} =$

$= \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in Im(T)$ una pre imagen es v_2

pues $T(v_2) = v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$Nu(T) = gen\{v_1 + v_2 - v_3\} = gen\{x + x^2 + 1 + x^2 - (1+x)\} =$

$= gen\{x^2\} \Rightarrow \quad T(ax^2 + 1 + x^2) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

La solución por cuadrados mínimos de la ecuación

$$\begin{bmatrix}1 & -0.1\\ 1 & 0\\ 1 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 1\\ 3\end{bmatrix} \text{ es}$$

Seleccione una:

a. $[x_1 \;\; x_2]^T = [\frac{8}{3} \;\; -15]^T$.

b. Ninguna de las otras es correcta.

c. $[x_1 \;\; x_2]^T = [\frac{8}{3} \;\; -5]^T$. ✔

d. $[x_1 \;\; x_2]^T = [\frac{8}{3} \;\; -10]^T$.

e. $[x_1 \;\; x_2]^T = [\frac{8}{3} \;\; 15]^T$.

$Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$

$Col(A)^\perp = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} = \underbrace{\alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\in (Col(A))^\perp} + \underbrace{\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in Col(A)}$$

Resolviendo el sistema $\quad \alpha = 5/6 \quad \beta = 8/3 \quad \gamma = -1/2 \Rightarrow$

$$\underset{(Col(A))}{\text{Proy}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/6 \\ 8/3 \\ 13/6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\hat{x} = \begin{pmatrix} 19/6 \\ 8/3 \\ 13/6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 8/3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/6 \\ 8/3 \\ 13/6 \end{pmatrix}$$

c) es la correcta

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ el operador diferencial $L[y] = y'' + a_1 y' + a_0 y$ tal que la ecuación $L[y] = 0$ tiene como solución a la función $y = 2e^{3x} + 3e^{2x}$. La solución general de la ecuación $L[y] = e^x$ es

Seleccione una:

- a. $y = \frac{1}{2}e^{3x} + ae^x + be^{2x}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
- b. $y = \frac{1}{6}e^{5x} + ae^{2x} + be^{3x}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
- c. Ninguna de las otras es correcta.
- d. $y = \frac{1}{2}e^x + ae^{3x} + be^{2x}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. ✔
- e. $y = -e^{2x} + ae^x + be^{3x}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

El dato nos dice que $Nu(L) = gen\{e^{3x}, e^{2x}\} \Rightarrow$

$a_1 = -5 \quad a_0 = 6$

Busco y_p / $L[y_p] = e^x$

$y_p = Ae^x \Rightarrow Ae^x[1 - 5 + 6] = e^x$

$2A = 1 \quad A = 1/2$

$\Rightarrow y = 1/2\, e^x + a e^{3x} + b e^{2x}$